



# پایه دوازدهم ریاضی

## آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



دفعه سؤالی  
دوره زودبست دی ماه

بسته جامع آمادگی نیم سال اول

ردیف	درس	تعداد صفحه	زمان پاسخگویی
۱	هندسه (۳)	۳	۱۲۰ دقیقه

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

سؤالات آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: هندسه ۳		پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: دی‌ماه ۱۴۰۴
تعداد صفحه: ۳		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع:	نام و نام خانوادگی:
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی			گروه آموزشی ماز	
ردیف	سوالات (پاسخ‌برگ دارد)			
نمره				
۱	<p><b>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.</b></p> <p>الف) هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است.</p> <p>ب) اگر برای ماتریس‌های متمایز <math>A</math>، <math>B</math> و <math>C</math> داشته باشیم <math>AB=AC</math>، آن‌گاه لزوماً <math>B=C</math> است.</p> <p>پ) اگر <math>A</math> و <math>B</math> دو ماتریس <math>2 \times 2</math> باشد، آن‌گاه <math> AB = A  B </math>.</p> <p>ت) نقطه <math>A(-1, -1)</math> درون دایره <math>x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0</math> است.</p>			
۲	<p><b>جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.</b></p> <p>الف) اگر در ماتریس قطری تمام درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را ماتریس ..... می‌نامند.</p> <p>ب) اگر <math>A = \begin{bmatrix} -\sin \theta &amp; \cos \theta \\ \cos \theta &amp; \sin \theta \end{bmatrix}</math> باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس <math>A</math> برابر ..... است.</p> <p>پ) اگر <math>A = \begin{bmatrix} 2 A  &amp;  A  \\ \gamma &amp;  A ^2 \end{bmatrix}</math> و <math>A</math> ماتریسی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه مقدار <math> A ^2 - 4</math> برابر ..... است.</p> <p>ت) اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد آن موازی نباشد و از رأس عبور نکند، آن‌گاه سطح مقطع حاصل یک ..... است.</p>			
۳	<p><b>در هر قسمت، گزینه صحیح را از میان گزینه‌های داده شده انتخاب کنید و در پاسخ‌برگ بنویسید.</b></p> <p>الف) اگر <math>A = \begin{bmatrix} 0 &amp; -1 \\ 1 &amp; 0 \end{bmatrix}</math> باشد، آن‌گاه حاصل <math>A^{1404}</math> برابر ماتریس ..... است.</p> <p>(۱) <math>I</math>      (۲) <math>-I</math>      (۳) <math>A</math>      (۴) <math>-A</math></p> <p>ب) وضعیت دو دایره <math>(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2</math> و <math>x^2 + y^2 - 2x + y = 0</math> نسبت به هم چگونه‌اند؟</p> <p>(۱) مماس درون      (۲) مماس برون      (۳) متقاطع      (۴) متداخل</p>			
	صفحه ۱ از ۳			

سؤالات آزمون شبهه‌ساز نهایی درس: هندسه ۳	پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: دی‌ماه ۱۴۰۴											
تعداد صفحه: ۳	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع:	نام و نام خانوادگی:											
آزمون شبهه‌ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز												
ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد)													
نمره														
۴	<p>حاصل هر یک از عبارتهای ستون A را از ستون B انتخاب کنید و در پاسخ‌برگ بنویسید. (یکی از اعداد ستون B اضافه است).</p> <table border="1" style="width: 100%;"> <thead> <tr> <th style="width: 20%;">B</th> <th style="width: 80%;">A</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">۲</td> <td>الف) در ماتریس <math>A = [a_{ij}]_{4 \times 3}</math> که در آن <math>a_{ij} = \frac{i-j}{2j+1}</math> باشد، درایه واقع بر سطر دوم ستون سوم برابر ..... می‌باشد.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>-\frac{1}{7}</math></td> <td>ب) اگر ماتریس <math>A = \begin{bmatrix} -a &amp; 2b+1 \\ a^2-1 &amp; a+2 \end{bmatrix}</math> اسکالر باشد، آن‌گاه مقدار عددی <math>\frac{a}{b}</math> مساوی ..... است.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">-۲۰</td> <td>پ) اگر A یک ماتریس <math>3 \times 3</math> و دترمینان آن برابر ۴ باشد، دترمینان ماتریس <math>-2A^{-1}</math> برابر ..... است.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">-۲</td> <td>ت) اگر ماتریس <math>A = \begin{bmatrix} 2 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; -2 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 5 \end{bmatrix}</math> باشد، <math> A </math> برابر است با .....</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">۱</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	B	A	۲	الف) در ماتریس $A = [a_{ij}]_{4 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \frac{i-j}{2j+1}$ باشد، درایه واقع بر سطر دوم ستون سوم برابر ..... می‌باشد.	$-\frac{1}{7}$	ب) اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} -a & 2b+1 \\ a^2-1 & a+2 \end{bmatrix}$ اسکالر باشد، آن‌گاه مقدار عددی $\frac{a}{b}$ مساوی ..... است.	-۲۰	پ) اگر A یک ماتریس $3 \times 3$ و دترمینان آن برابر ۴ باشد، دترمینان ماتریس $-2A^{-1}$ برابر ..... است.	-۲	ت) اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، $ A $ برابر است با .....	۱		۱
B	A													
۲	الف) در ماتریس $A = [a_{ij}]_{4 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \frac{i-j}{2j+1}$ باشد، درایه واقع بر سطر دوم ستون سوم برابر ..... می‌باشد.													
$-\frac{1}{7}$	ب) اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} -a & 2b+1 \\ a^2-1 & a+2 \end{bmatrix}$ اسکالر باشد، آن‌گاه مقدار عددی $\frac{a}{b}$ مساوی ..... است.													
-۲۰	پ) اگر A یک ماتریس $3 \times 3$ و دترمینان آن برابر ۴ باشد، دترمینان ماتریس $-2A^{-1}$ برابر ..... است.													
-۲	ت) اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، $ A $ برابر است با .....													
۱														
۵	اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-1 & 8 \\ 3 & z+1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} y+1 & x-2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x+y+z$ را بیابید.	۱												
۶	اگر $A = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ -1 & y \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد و $A \times B$ ماتریسی قطری باشد، $x+y$ را پیدا کنید.	۱												
۷	دو ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ، با درایه‌های به فرم $a_{ij} = \begin{cases} 1-i & ;  i-j  \leq 1 \\ 2 & ;  i-j  > 1 \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. ب) حاصل $(B-I)(B+I)$ را بیابید.	۱/۵												
۸	جواب‌های معادله $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.	۱/۵												
۹	اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ .	۱												
۱۰	دستگاه $\begin{cases} 4x+y=11 \\ 2x-3y=9 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	۱/۵												
۱۱	در دستگاه زیر مقدار m را طوری به دست آورید که دستگاه جواب نداشته باشد. $\begin{cases} (m-3)x+3y=m \\ 4x+(m+1)y=2 \end{cases}$	۱/۵												
صفحه ۲ از ۳														

ردیف	سوالات (پاسخ‌برگ دارد)	نمره
سوالات آزمون شبهه‌ساز نهایی درس: هندسه ۳ پایه: دوازدهم رشته: ریاضی و فیزیک تاریخ آزمون: دی‌ماه ۱۴۰۴		
تعداد صفحه: ۳ مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه ساعت شروع: نام و نام خانوادگی:		
آزمون شبهه‌ساز امتحان نهایی گروه آموزشی ماز		
۱۲	دترمینان ماتریس مقابل را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	۱
۱۳	نقاط A، B و C در یک صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از نقاط A و B به یک فاصله بوده و از نقطه C به فاصله ۲ سانتی‌متر باشد. (در مورد تعداد جواب‌های ممکن بحث کنید).	۱/۲۵
۱۴	وضعیت نسبی خط $3x - 4y + 3 = 0$ و دایره $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y = 4$ را بررسی کنید.	۱
۱۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که دو خط $3x - y = 3$ و $x + y = 5$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x - 3y = 4$ بر آن مماس باشد.	۱/۲۵
۱۶	معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(-1, 2)$ مرکز آن بوده و روی خط $3x + 4y = -5$ و تری به طول $2\sqrt{5}$ جدا کند.	۱/۲۵
۱۷	مقدار m را طوری بیابید که دو دایره $x^2 + y^2 - 6x - 2y = -9$ و $x^2 + y^2 + 2x + 4y + m = 0$ مماس داخل باشند.	۱/۲۵
	موفق باشید.	۲۰
	صفحه ۳ از ۳	



پایه دوازدهم ریاضی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



پاسخبرگ هندسه (۳)

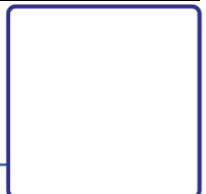
دوره زودبست دی ماه

بسته جامع آمادگی نیم سال اول

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: هندسه ۳
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱	الف) ..... (ب) ..... (پ) ..... (ت) .....	۱
۲	الف) ..... (ب) ..... (پ) ..... (ت) .....	۱
۳	(ب)	۱
۴	الف) ..... ب) ..... پ) ..... ت) .....	۱
۵		۱
۶		۱



ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: هندسه ۳
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۷	الف) ب)	۱/۵
۸		۱/۵
۹		۱
۱۰		۱/۵

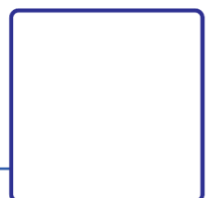


ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: هندسه ۳
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۱		۱/۵
۱۲		۱
۱۳		۱/۲۵
۱۴		۱

ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: هندسه ۳
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۵		۱/۲۵
۱۶		۱/۲۵
۱۷		۱/۲۵
	موفق باشید.	۲۰





# پایه دوازدهم ریاضی

## آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



دفترچه پاسخ

دوره زودبست دی ماه

بسته جامع آمادگی نیم سال اول

ویراستاران

ارسلان حسنونند - نرجس تیمناک  
حمیدرضا ولی‌پور

طراحان

سید جواد نظری - محدثه شیخعلی

درس

هندسه (۳)

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

# زودبیسست

## مصحح شو:



پاسخ دقیق سؤال این جا میاد و اسمش روشه: «مصحح شو»، می خواد شما رو به یه مصحح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این جا بهتون گفتیم.

## بررسی دقیق‌تر:



اگه پاسخ کوتاه به سؤال کافی نباشه تا ببینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌تر جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

## نقشه نهایی:



امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاوره حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

## ۲۰ شو:



توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درسنامه‌هاش دقیقاً فاصله بین نمره خوب و نمره ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

## نکته طلایی:



با وجود «۲۰ شو»، که کلی درسنامه مفصل داره، باز هم اگه نکته مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.

## تیم اجرایی و تولید آزمون

زهره جعفری  
ساره محمدعلی نسب

یگانه پوراابراهیم  
محدثه عربگری

مرضیه بنیانی  
محدثه شیخعلی

## سرپرست آزمون: ارمغان قریب

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

## دکتر رسول خنجری

راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: هندسه ۳		رشته: ریاضی و فیزیک
دوره دوم متوسطه - دوازدهم	تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	ساعت شروع:
آزمون شبهه ساز امتحان نهایی		مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه
گروه آموزشی ماز		
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	<p><b>مصحح شو</b> </p> <p>الف) درست (۰.۲۵) (صفحه ۱۹)</p> <p>ب) نادرست (۰.۲۵) (صفحه ۲۹)</p> <p>پ) درست (۰.۲۵) (صفحه ۲۹)</p> <p>ت) درست (۰.۲۵) (صفحه ۴۶)</p> <p><b>بررسی دقیق تر:</b> </p> <p>الف) ماتریس اسکالر و ماتریس قطری:</p> <p>به جز قطر اصلی، همه درایه‌ها صفر (درایه‌های قطر اصلی هم برابرند) <math>\Rightarrow</math> ماتریس اسکالر                  بجز قطر اصلی، همه درایه‌ها صفر! <math>\Rightarrow</math> ماتریس قطری</p> <p>ب) اگر <math>A</math> وارون پذیر باشد این گزاره درست همیشه! ولی می‌دونیم ماتریس دلخواه <math>A</math> لزوماً وارون پذیر نیست (یا نمی‌دونیم!)</p> <p>(اگر <math>\det A \neq 0</math>، <math>A</math> وارون پذیر همیشه و داریم:</p> $AB = AC \Rightarrow A^{-1} \times AB = A^{-1} \times AC \Rightarrow B = C$ <p>پ) خواص دترمینان</p> <p>ت) اگر این سوال، جاخالی یا صحیح غلط یا تستی بود و راه حل از من نمی‌خواستن، خیلی سریع <math>X</math> و <math>Y</math> نقطه رو می‌ذاریم تو معادله دایره (!) مثلاً اینجا:</p> $(-1, -1) \Rightarrow (-1)^2 + (-1)^2 - 2(-1) + 4(-1) - 5 = 1 + 1 + 2 - 4 - 5 = -5$ <p>حالا اگر عدد حاصل شده مثبت بود، نقطه خارج دایره، اگر صفر شد روی دایره و اگر منفی بود درون دایره‌اس!                  حواست باشه که معادله دایره به فرم <math>f(x, y) = 0</math> نوشته شده باشد. (یعنی کل معادله رو برده باشیم یک سمت!)</p> <p><b>سبز بودی یا قرمز؟</b> بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۱ دقیقه </p> <p><b>مسیر تمرینی!</b> </p> <p>مشابه این سوال در سوال ۱ آزمون امتحان نهایی ۱۴۰۴ قسمت «الف» مطرح شده بود.</p>	۱
۲	<p><b>مصحح شو</b> </p> <p>الف) اسکالر (۰.۲۵) (صفحه ۱۹)</p> <p>ب) <math>-1</math> (۰.۲۵) (صفحه ۲۳)</p> <p>پ) صفر (۰.۲۵) (صفحه ۳۰)</p> <p>ت) بیضی (۰.۲۵) (صفحه ۳۵)</p> <p><b>بررسی دقیق تر:</b> </p> <p>الف) اینم یه راهنمایی کوچیک که سوال ۱ رو باهش درست بزنی! هر ماتریس اسکالر ماتریس قطری است که درایه‌های قطر اصلی آن باهم برابرند!</p> <p>ب)</p> $\det A = -\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = -(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = -1$ <p>پ) از دو طرف دترمینان می‌گیریم:</p> $A = \begin{bmatrix} 2 A  &  A  \\ \gamma &  A ^2 \end{bmatrix} \Rightarrow  A  = 2 A ^3 - \gamma A  \Rightarrow 2 A ^3 - 8 A  = 0 \Rightarrow 2 A ( A ^2 - 4) = 0$	۱

حالا چون  $A$  وارون پذیره،  $|A| \neq 0$ ، پس باید  $|A|^2 - 4 = 0$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه

نقشه نهایی:

در عین حال که مسائلی که جاخالی که راه‌حل طولانی ندارند، باید کاملاً با حوصله حلشون کنین، چون فقط جواب نهایی که میره تو جاخالی، مهمه!

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۲ آزمون امتحان نهایی ۱۴۰۴ قسمت «الف» مطرح شده بود.

مصحح شو

الف) I (گزینه ۱) (۰.۵) ب) متقاطع (گزینه ۳) (۰.۵)

بررسی دقیق‌تر:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$\Rightarrow A^2 = -I \Rightarrow A^4 = I \xrightarrow{4 \times 1404} A^{1404} = I$$

عاد کردن رو که از گسسته یادتون هست؟!

این سوالم خیلی تکرار میشه جاهای مختلف و روش حلش الگوییابه! فقط اگر تستی باشه باید خیلی سریع‌تر عمل کنیم و اینجا بیشتر سعی می‌کنیم با دقت بریم جلو!

ب) برای تعیین وضعیت دو دایره، ابتدا طول شعاع و مختصات مرکزهاشون رو پیدا می‌کنیم:

نکته طلایی

مختصات مرکز و شعاع دایره به معادله  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  برابر است با:

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 \Rightarrow \text{مرکز } O: (1, -1), R = \sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + y = 0 \Rightarrow \text{مرکز } O': \left(1, -\frac{1}{2}\right), R' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

از طرفی:  $d = OO'$ ، پس:

$$d = \sqrt{(1-1)^2 + \left(-1 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

در نهایت  $d$  را با  $R + R'$  و  $|R - R'|$  مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} R + R' = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 2.53 \\ |R - R'| = \left| \sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right| \approx 0.29 \end{cases}$$

دو دایره متقاطع هستند.  $|R - R'| < d < R + R' \Rightarrow$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

مصّحح شو

الف)  $-\frac{1}{7}$  (۰.۲۵)    ب) ۲ (۰.۲۵)    پ)  $-2$  (۰.۲۵)    ت)  $-20$  (۰.۲۵)

بررسی دقیق‌تر:

الف)

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 3}, \quad a_{ij} = \frac{i-j}{2j+1}$$

با توجه به ضابطه  $a_{ij}$ ، درایه‌های ماتریس را می‌توان حساب کرد. برای درایه سطر دوم و ستون سوم، باید  $i=2$  و  $j=3$ ،

$$a_{23} = \frac{2-3}{2(3)+1} = -\frac{1}{7}$$

یعنی  $a_{23}$  را حساب کنیم:

ب) می‌دانیم ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر برابرند، اسکالر است، پس:

$$\begin{cases} -a = a + 2 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1 \\ a^2 - 1 = 2b + 1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}, a = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

در نتیجه:

پ) از خواص دترمینان می‌دانیم اگر  $k \in \mathbb{R}$  و  $A$  ماتریس  $n \times n$ ،  $|kA| = k^n |A|$  و همچنین  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ ، بنابراین:

$$|-2A^{-1}| = (-2)^3 \times \frac{1}{|A|} = -2$$

ت) چون ماتریس قطری است، دترمینان ماتریس قطری می‌شه حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی، پس:

$$|A| = 2 \times (-2) \times 5 = -20$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه

نکته طلایی

دترمینان هر ماتریس قطری به صورت  $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$  برابر  $|A| = abc$  است و همچنین اگر  $k$  عددی حقیقی و  $A$  ماتریس مربعی مرتبه  $n$  باشد، همواره رابطه زیر برقرار است:

$$|kA| = k^n |A|$$

نقشه نهایی:

این خواص دترمینان همیشه سوال دارن! خوب از الان روشن کار کن که گیر طراح نهایی نیفتی!

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۳ آزمون امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصّحح شو

ماتریس‌های  $A$  و  $B$  زمانی با هم برابر هستند که درایه‌هاشون نظیر به نظیر برابر باشه! (یعنی عیناً یکی باشن!)

	$\begin{cases} y+1 = x-1 \xrightarrow{x=10} y+1 = 9 \Rightarrow y = 8 \text{ (0.25)} \\ x-2 = 8 \Rightarrow x = 10 \text{ (0.25)} \\ 3 = 3 \\ 4 = z+1 \Rightarrow z = 3 \text{ (0.25)} \end{cases}$ <p>و در نتیجه: <math>x+y+z = 10+8+3 = 21</math> (0.25)</p> <p><b>سبز بودی یا قرمز؟</b> بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه</p> <p><b>مسیر تمرینی:</b> مشابه این سوال در سوال ۷ آزمون امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.</p> <p><b>نقشه نهایی:</b> از اینجا دیگه سوالاتی تشریحی شروع می شه. از اینجا به بعد هر چی به ذهنتون میاد و نمیداد رو باید بنویسین! نوشتن هر بخش ممکنه بارم داشته باشه. پس حسابی سر حوصله بشینین پای پاسخ برگ. حتی می تونین آخر کار ببینین آیا تعداد قدم های حلی که نوشتید با بارم سوال همخوانی داره یا نه؟ (بچه زرنگا اینجوری بیست میشن!)</p>	
۱	<p><b>مصحح شو</b></p> <p>ابتدا <math>A \times B</math> را محاسبه می کنیم:</p> $A = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ -1 & y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ -1 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-1 & 2x+2 \\ -1-y & -1+2y \end{bmatrix} \text{ (0.25)}$ <p>حال طبق فرض سوال، <math>A \times B</math> قطری و در نتیجه: <math>2x+2 = -1-y = 0</math></p> $\Rightarrow x = -1, y = -1 \Rightarrow x+y = -2$ <p>(0.25) (0.25) (0.25)</p> <p><b>ماتریس قطری</b> ماتریس قطری: هر ماتریس مربعی که درایه های به جز قطر اصلی آن صفر هستند را ماتریس قطری می نامیم.</p>	۶
۱/۵	<p><b>مصحح شو</b></p> <p>الف) (صفحه ۲۱)</p> <p>(این تعریف و ضابطه برای <math>a_{ij}</math>، عملاً داره می گه اگر شماره سطر و ستون اختلافشون یکی بوده و یا درایه روی قطر اصلی بود، اون درایه می شه <math>1-i</math> و خارج از اینا هم می شه ۲)</p> $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}, a_{ij} = \begin{cases} 1-i &  i-j  \leq 1 \\ 2 &  i-j  > 1 \end{cases}$ $(*)  i-j  \leq 1 \Rightarrow -1 \leq i-j \leq 1 \xrightarrow{i,j \in \mathbb{N}} i-j = \pm 1, i-j = 0 \text{ (0.25)}$ <p><math>A</math> ماتریس <math>3 \times 3</math> است، بنابراین:</p> $A = \begin{bmatrix} 1-1 & 1-1 & 2 \\ 1-2 & 1-2 & 1-2 \\ 2 & 1-3 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \text{ (0.5)}$	۷

ب) دو روش برای حل این قسمت وجود دارد:

(۱)  $B-I$  و  $B+I$  را محاسبه کرده و در هم ضرب کنیم.

(۲) می‌دانیم اتحادهای جبری برای ماتریس دلخواه  $B$  و  $I$  برقرار است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$(B-I)(B+I) = B^2 - I^2 = B^2 - I$$

روش اول:

$$B-I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (0.25), \quad B+I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad (0.25)$$

بنابراین:

$$(B-I)(B+I) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 3 & -15 \\ 0 & -2 & -6 \\ 13 & -6 & 6 \end{bmatrix} \quad (0.25)$$

روش دوم:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 3 & -15 \\ 0 & -1 & -6 \\ 13 & -6 & 7 \end{bmatrix} \quad (0.5)$$

$$\Rightarrow B^2 - I = \begin{bmatrix} -11 & 3 & -15 \\ 0 & -2 & -6 \\ 13 & -6 & 6 \end{bmatrix} \quad (0.25)$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۱۰ دقیقه

راهنمای مصحح:

اگر در قسمت «الف»، معادله (\*) نوشته نشده، اما ماتریس  $A$  به فرم اولیه نوشته شده، نمره معادله (\*) به دانش‌آموز تعلق می‌گیرد.

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۶ آزمون امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصحح شو

به ترتیب از چپ به راست شروع به ضرب کردن می‌کنیم: (صفحه ۱۸)

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+2 & 3 \end{bmatrix} \quad (0.25)$$

$$\begin{bmatrix} -x+2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = -x^2 + 2x + 3 = 0 \quad (0.25)$$

حال در ادامه:

از آن جا که  $a+c=b$ ،  $x=-1$  و  $x=\frac{-c}{a}$  ریشه‌ها هستند، پس جواب‌های معادله می‌شن:


$$\begin{cases} x = -1 \quad (0.5) \\ x = 3 \quad (0.5) \end{cases}$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

۱/۵

۸

<p>۱</p>	<p style="text-align: right;"><b>مصّحح شو</b> </p> <p>برای اثبات تساوی جبری کافی است از یک سمت شروع کرده و سمت دیگر را به دست آوریم. (صفحه ۲۱)</p> $(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = A^2 - AB - BA + B^2 \quad (۰.۵)$ <p>اما طبق فرض، <math>AB = BA</math> و <math>A</math> و <math>B</math> تعویض پذیرند، (۰.۵) پس:</p> $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ <p>و حکم اثبات می‌شود.</p> <p style="text-align: right;"><b>نقشه نهایی:</b> </p> <p>معمولاً توی همه نهایی‌ها سوال اثباتی از هندسه ۳ داریم ولی اصلاً نگران نباشید! تعداد این سوال‌ها آنقدر کمه که همشون تو کتاب درسی به نحوی پیدا میشن!</p> <p style="text-align: right;"><b>راهنمای مصحح:</b> </p> <p>اگر بسط به شکل <math>(A - B)(A - B) = A(A - B) - B(A - B) = \dots</math> انجام شد، نمره به دانش‌آموز تعلق می‌گیرد.</p>	<p>۹</p>
<p>۱/۵</p>	<p style="text-align: right;"><b>مصّحح شو</b> </p> <p>(صفحه ۲۵) اگر دستگاه را به صورت <math>AX = B</math> نمایش دهیم که در آن <math>A</math> ماتریس ضرایب باشد، جواب دستگاه برابر <math>X = A^{-1}B</math> است. (که یعنی دستگاه وقتی جواب داره که <math>A</math> وارون داشته باشه. می‌دونیم که ماتریس‌ها همیشه وارون ندارن!)</p> <p>با توجه به دستگاه: <math display="block">\begin{cases} 4x + y = 11 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases}</math> داریم:</p> $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$ <p>پس برای حل دستگاه، ابتدا وارون <math>A</math> را محاسبه می‌کنیم:</p> $ A  = 4(-3) - 2(1) = -14 \quad (۰.۲۵)$ $A^{-1} = \frac{1}{ A } \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} \quad (۰.۲۵)$ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (۰.۵)$ <p>بنابراین <math>x = 3</math> و <math>y = -1</math> (۰.۲۵).</p> <p style="text-align: right;"><b>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۶ دقیقه</b> </p>	<p>۱۰</p>

وارون ماتریس 

اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  باشد، در این صورت وارون ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

و می‌دانیم  $A^{-1}A = AA^{-1} = I$  است.

 راهنمای مصحح: 

اگر  $|A|$  در همان مراحل محاسبه  $A^{-1}$  حساب شده، نمره به دانش‌آموز تعلق می‌گیرد.

 مسیر تمرینی: 

مشابه این سوال در سوال ۵ آزمون امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

 مصحح شو 

(صفحه ۲۶) اگر قرار باشد دستگاه  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  جواب نداشته باشد، باید  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$  (معادله دو خط موازی!) (۰.۲۵)

بنابراین:

$$(*) \frac{m-3}{4} = \frac{3}{m+1} \neq \frac{m}{2} \quad (۰.۲۵)$$

$$m^2 - 2m - 3 = 12 \Rightarrow m^2 - 2m - 15 = 0 \Rightarrow (m-5)(m+3) = 0 \quad (۰.۵)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=5 \xrightarrow{(*)} \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{5}{2} \checkmark \\ m=-3 \xrightarrow{(*)} \frac{-6}{4} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2} \text{ غ ق ق } \times \end{cases} \quad (۰.۲۵)$$

پس تنها  $m=5$  قابل قبول است. (۰.۲۵)

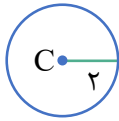
سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۶ دقیقه 

۱/۵

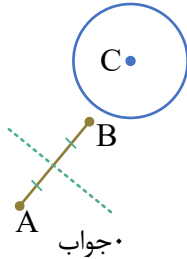
۱۱

	<p><b>وضعیت دستگاه معادلات</b> </p> <p><b>الف)</b> اگر <math>\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}</math>، در این صورت دو خط متقاطع‌اند و دستگاه یک جواب یکتا دارد.</p> <p><b>ب)</b> اگر <math>\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}</math>، در این صورت دو خط موازی‌اند و یکی از دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:</p> <p>۱. <math>\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}</math>، در این حالت دو خط موازی‌اند و هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند لذا دستگاه هیچ جوابی ندارد.</p> <p>۲. <math>\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}</math>، در این حالت دو خط موازی‌اند و روی یکدیگر واقع‌اند یا به عبارتی هر دو معادله یک خط را نشان می‌دهند، لذا دستگاه تعداد بی‌شمار جواب دارد و هر نقطه‌ای که در یکی از معادلات صدق کند، در دیگری هم صدق می‌کند.</p> <p><b>راهنمای مصحح:</b> </p> <p>اگر دانش‌آموز به غیرقابل قبول بودن <math>m = -3</math> اشاره‌ای نکرده، نمره آن قسمت کسر شود.</p>	
<p>۱</p>	<p><b>مصحح شو</b> </p> <p>(صفحه ۲۹) برای استفاده از دستور ساروس، دو ستون اول ماتریس را بعد از ستون سوم اضافه می‌کنیم و به صورت زیر عمل می‌کنیم:</p> $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad (0.5)$ $(1 \times 2 \times 1 + 2 \times 3 \times (-1) + (-1) \times 1 \times 2) - ((-1) \times 2 \times (-1) + 2 \times 3 \times 1 + 1 \times 1 \times 2)$ $\Rightarrow (2 - 6 - 2) - (2 + 6 + 2) = -6 - (10) = -16 \quad (0.5)$ <p>و بنابراین به کمک روش ساروس، دترمینان <math>-16</math> می‌شود.</p> <p><b>راهنمای مصحح</b> </p> <p>چون در صورت سوال ذکر شده از دستور ساروس استفاده شود، استفاده از هر روش دیگری نمره ندارد.</p> <p><b>سبز بودی یا قرمز؟</b> بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: <b>۴ دقیقه</b> </p> <p><b>نقشه نهایی:</b> </p> <p>احتمالاً تنها جایی که این روش ساروس به درد می‌خورد امتحان نهاییه! خوب یادش بگیرید که کاری نداره!</p>	<p>۱۲</p>
<p>۱/۲۵</p>	<p><b>مصحح شو</b> </p> <p>(صفحه ۳۷) اگر قرار است نقطه‌ای در فاصله مساوی از دو نقطه A و B قرار داشته باشد، همان‌طور که از هندسه ۱ به خاطر داریم، باید روی عمودمنصف پاره‌خط وصل A و B باشد. <b>(۰.۲۵)</b></p>	<p>۱۳</p>

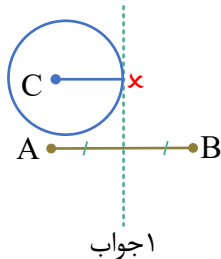
همچنین نقاطی که از نقطه C به فاصله ۲ قرار دارند، روی دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز C قرار دارند. (۰.۲۵)



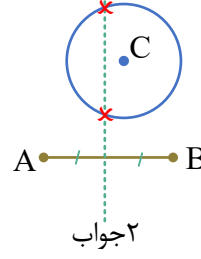
پس اگر نقطه‌ای هر دو ویژگی را داشته باشد، باید نقطه برخورد دایره و خط عمودمنصف باشد، می‌دانیم تعداد نقاط برخورد خط و دایره حداکثر ۲ تا است.  
پس یا ۲ جواب یا ۱ جواب و یا چنین نقطه‌ای وجود ندارد.



(۰.۲۵)



(۰.۲۵)



(۰.۲۵)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۷ دقیقه

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۹ آزمون امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصّحح شو

برای بررسی وضعیت نسبی خط و دایره، فاصله مرکز دایره تا خط را به دست آورده و با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم:

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y = 4$$

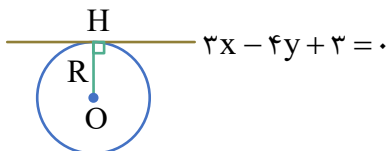
$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

بنابراین  $O(1, -1)$  مرکز دایره و  $R^2 = 4 \Rightarrow R = 2$  شعاع دایره است. (۰.۲۵)

حال، فاصله مرکز دایره را از خط  $3x - 4y + 3 = 0$  محاسبه می‌کنیم:

$$OH = \frac{|3(1) - 4(-1) + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2 \quad (۰.۲۵)$$

چون  $R = OH$ ، پس خط بر دایره مماس بوده است. (۰.۲۵)



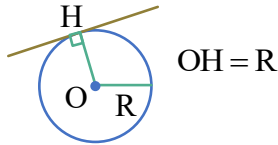
سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه

مصّحح شو

(صفحه ۴۳) ابتدا با برخورد دادن معادله دو قطر، مختصات مرکز دایره را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 3 \quad (0.25) \quad (0.25)$$

حال از آن جا که خط  $4x - 3y = 4$  بر دایره مماس است، فاصله مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره می‌شود.



$$OH = R = \frac{|4(2) - 3(3) - 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{5}{5} = 1 \quad (0.25) \quad (0.25)$$

بنابراین:

پس باید معادله دایره‌ای به مرکز  $O(2, 3)$  و شعاع  $R = 1$  را بنویسیم:

$$(0.25) (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1 \quad \text{یا} \quad x^2 - 4x + y^2 - 6y + 12 = 0$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه

راهنمای مصحح:

هر کدام از معادلات دایره نوشته شوند به دانش‌آموز نمره تعلق می‌گیرد.

نقشه نهایی:

توی بخش چک‌نویست حتماً سعی کن برای حل سوالات این بخش شکلی بکشی! با رسم کردن خطوط مناسب و بررسی روابط میتونی روش حل سوال رو سریع‌تر پیدا کنی!

مسیر تمرینی:

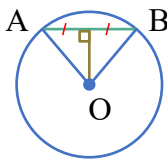
مشابه این سوال در سوال ۱۰ آزمون امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصّحح شو

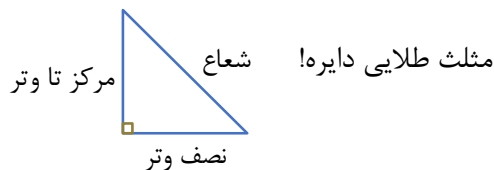
(صفحه ۴۳) دایره روی خط  $l$  و تری به طول  $2\sqrt{5}$  جدا می‌کنه، از هندسه ۲ می‌دانیم اگر از مرکز دایره، بر وترها عمود

رسم کنیم، عمودمنصف خواهد بود. (۰.۲۵) شکل رو ببین!

با رسم خطوط آبی (همون شعاع!) دو مثلث هم‌نهشت داریم و ...



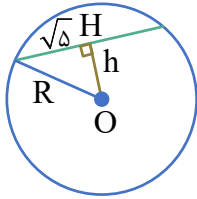
حالا این مثلث خیلی مهمه! چون قائم‌الزاویه است و ما با داشتن هر دو تا ضلع می‌تونیم اون یکی رو با فیثاغورس پیدا کنیم.



۱/۲۵

۱۶

برای نوشتن معادله دایره، به طول شعاع نیاز داریم، بنابراین اول می‌ریم سراغ پیدا کردن  $h$  که همون فاصله مرکز تا وتره!



$$OH = h = \frac{|3(-1) + 4(2) + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2 \quad (0.25)$$

بنابراین با استفاده از فیثاغورس داریم:

$$2^2 + (\sqrt{5})^2 = R^2 \Rightarrow R = 3 \quad (0.25)$$

در نتیجه:

$$(0.5) \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9 \quad \text{یا} \quad x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۶ دقیقه

مصطح شو

(صفحه ۴۴) برای آن که دو دایره به شعاع  $R$  و  $R'$  با هم مماس درونی باشند، باید:  $d = |R - R'|$  که  $d$  طول خط‌المركزین است. پس ابتدا مرکز دواير را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y = -9 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = -9 + 1 + 9 = 1 \Rightarrow O(3, 1), R = 1 \quad (0.25) \quad (0.25)$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y + m = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = 4 + 1 - m \Rightarrow O'(-1, -2), R' = \sqrt{5-m} \quad (0.25)$$

$$1/25 \quad d = OO' = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5 \quad (0.25)$$

پس باید:  $5 = |1 - \sqrt{5-m}|$   
و در نتیجه:

$$\begin{cases} \sqrt{5-m} = -4x \\ \sqrt{5-m} = 6 \Rightarrow 5-m = 36 \Rightarrow m = -31 \quad (0.25) \end{cases}$$

پس به ازای  $m = -31$ ، دو دایره مماس درونی هستند.

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۶ دقیقه

۲۰

موفق باشید.

۱۷